



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Mecanique 331 (2003) 705–711



Bifurcations et solutions multiples en cavité 3D différentiellement chauffée

Gaëtan de Gassowski^a, Shihe Xin^b, Olivier Daube^a

^a LMEE, 40, rue de Pelvoux, CE1455 Courcouronnes, 91020 Evry cedex, France

^b LIMS-CNRS, BP133, 91403 Orsay cedex, France

Reçu le 10 avril 2003 ; accepté le 9 juillet 2003

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

Dans cet article, nous étudions par simulation numérique directe tridimensionnelle, l'écoulement de convection naturelle dans une cavité carrée/cubique différentiellement chauffée. Nos calculs mettent en évidence à la première bifurcation ($\mathcal{R}_a \approx 3,2 \times 10^7$) l'apparition de structures tourbillonnaires tridimensionnelles à la sortie des couches limites verticales. Les principaux résultats de cette Note sont d'une part, que l'écoulement redevient stationnaire pour des valeurs du nombre de Rayleigh \mathcal{R}_a plus élevées ($\mathcal{R}_a = 7 \times 10^7$ et 10^8 par exemple) tout en conservant ces structures tourbillonnaires tridimensionnelles et d'autre part, que des solutions stationnaires multiples différentes par leurs propriétés de symétrie, ont été obtenues pour $\mathcal{R}_a = 10^8$. Enfin, l'écoulement redevient instationnaire aux alentours de $\mathcal{R}_a = 3 \times 10^8$, l'instabilité en jeu dans ce cas étant du type couches limites verticales. *Pour citer cet article : G. de Gassowski et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Bifurcations and multiple solutions in a differentially heated cubic cavity. In this paper, a differentially heated square/cubic cavity is studied by performing three-dimensional direct numerical simulations. The first bifurcation observed at $\mathcal{R}_a \approx 3.2 \times 10^7$ is due to the 3D vortex structures generated at the end regions of vertical boundary layers near the median plane. The main results of this Note are that the flow returns to a steady state for higher values of the Rayleigh number \mathcal{R}_a (7×10^7 and 10^8 for example) still exhibiting these 3D vortex structures, and that multiple steady flows which differ by their symmetry properties, are obtained for $\mathcal{R}_a = 10^8$. However, the flow reverts to unsteadiness for $\mathcal{R}_a = 3 \times 10^8$. In this latter case, the instability is due to the vertical boundary layers. *To cite this article: G. de Gassowski et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Convection naturelle ; Transition ; Écoulement instationnaire ; Simulation tridimensionnelle

Keywords: Fluid mechanics; Free convection; Transition; Unsteady flow; Tridimensional simulation

Adresse e-mail : gassowski@cemif.univ-evry.fr (G. de Gassowski).

Abridged English version

Natural convection flows in differentially heated cavity have been extensively studied since the 2D benchmark of De Vahl Davis [1]. Two-dimensional simulations have been carried out for square and rectangular cavities filled with air (with aspect ratio ranging from 2 to 8), and large Rayleigh numbers ranging from 10^3 to 10^{10} . Recently, Labrosse et al. [2] showed by means of 3D computations that for cubic cavities, the agreement between 2D simulations and 3D results in the mid-plane increases with Rayleigh number, their results suggesting that significant side-walls effects are limited to low \mathcal{R}_a . Furthermore, unsteady flows are reported for values of \mathcal{R}_a within the range $[3.2 \times 10^7; 3.5 \times 10^7]$. In the present work, three-dimensional computations are performed for higher values of the Rayleigh number. We are interested, in particular, in 3D flow structure and in the first bifurcations likely to lead to transition toward a chaotic regime.

In this study, a cubic cavity (unit aspect ratio) filled with air is considered. Flow in the cavity is governed by the incompressible Navier–Stokes equations under the Boussinesq approximation. Two opposite vertical walls of the cavity are heated at different temperatures, the others being assumed to be adiabatic (Fig. 1). No-slip boundary conditions are applied to the velocity field.

The governing equations [3] are integrated in time using a second-order Euler scheme with explicit treatment of the non-linear terms (2nd order Adams–Bashforth scheme). Two spatial discretizations are compared: a finite differences technique using a staggered nonuniform grid and a Tchebychev spectral method [4]. In the Tchebychev collocation method the variables are defined at the Gauss–Lobatto points. The velocity–pressure coupling is handled by projection schemes in the finite difference code and by an influence matrix technique in the spectral code. Much of the computation was obtained by means of the finite difference code and was confirmed, if necessary, by spectral computations.

Numerical simulations for $\mathcal{R}_a = 10^6$ and 10^7 were first conducted and steady solutions were obtained. The corresponding flow characteristics in the mid-plane, reported in Table 1, are in good agreement with the results of [2] and confirm that 2D computations correctly predict 3D flows in the mid-plane. Results also show that, for a fixed \mathcal{R}_a , the Nusselt number $\mathcal{N}_{u_{2D}}$ computed from 2D computations over estimate the value $\mathcal{N}_{u_{3D}}$ derived from 3D computations, i.e., $\mathcal{N}_{u_{3D}} < \mathcal{N}_{u_{2D}}$. The differences observed are small: at $\mathcal{R}_a = 10^6$ for instance $\mathcal{N}_{u_{2D}} = 8.8120$, $\mathcal{N}_{u_{3D}} = 8.6469$ and according to [5] $\mathcal{N}_{u_{3D}} = 8.6393$. Note that these steady solutions exhibit 2D centro-symmetry, reflection symmetry and 3D centro-symmetry.

For \mathcal{R}_a ranging from 3.2×10^7 to 6.5×10^7 , unsteady solutions were obtained. In order to characterize flow structure of unsteady solutions one may use three indicators, E_{c-2d} , E_{r-y} and E_{c-3d} , which respectively measure the deviations from 2D centro-, reflection and 3D centro-symmetries. In agreement with [2], for all unsteady solutions E_{r-y} differs from zero and the reflection symmetry is broken. For $\mathcal{R}_a \geq 3.5 \times 10^7$, E_{c-2d} and E_{c-3d} are no longer equal to zero, therefore indicating that the three symmetries are broken. Detailed visualizations show that the flow unsteadiness is due to instabilities emerging downstream of the vertical boundary layers and located in the so-called hydraulic jumps. Three-dimensional structures responsible for the time dependence (Fig. 2(a)) take the form of longitudinal vortices (with axis parallel to x). The corresponding unsteady flow is characterized by low frequencies. Although this transition is similar to the first 2D bifurcation in a square cavity [6], the corresponding critical \mathcal{R}_a differ by one order of magnitude. Note also that the three-dimensional structure of the hydraulic jump results in an increase of the transverse velocity V . As these structures are located outside of the vertical boundary layers, the extrema of U and W do not change.

Starting from previous unsteady solutions, the Rayleigh number was further increased. The important point is that another transition takes place in the range $[6.5 \times 10^7, 7 \times 10^7]$ which leads to a steady regime which has not yet been reported in the literature. Moreover, multiple steady solutions were obtained for $\mathcal{R}_a = 10^8$. Several computations (with various initial conditions, time steps and spatial resolutions) have been carried out in order to assess the existence of these multiple steady solutions. These solutions differ by their symmetry properties. For one of them (Fig. 2(b)), the three symmetry breaking indicators are equal to zero which means that the three symmetries of the steady solutions at lower Rayleigh numbers ($\mathcal{R}_a \leq 3 \times 10^7$) are recovered. The two other solutions only

preserve one among the three symmetries: either 3D centro-symmetry (Fig. 2(c)) or reflection symmetry (Fig. 2(d)). All these solutions are characterized by non-oscillating longitudinal vortices. As longitudinal vortices are located in the hydraulic jump and outside the vertical boundary layers, the maximal velocities remain almost the same (Table 1).

Due to the very high CPU cost of 3D simulations, only one computation was performed at $\mathcal{R}_a = 3 \times 10^8$ and an unsteady solution was obtained. This time dependent flow is characterized by a high frequency and its period is of few time units. It may be concluded from this fact that the transition is of boundary layer type and is due to traveling waves in the vertical boundary layers.

1. Introduction

Les écoulements de convection naturelle en cavité bidimensionnelle différentiellement chauffée ont fait l'objet de plusieurs études et des cas de références ont été calculés (cf. [1]). De nombreuses simulations numériques ont été effectuées pour des cavités carrées ou allongées (de rapport d'aspect entre 2 et 8) et pour des nombres de Rayleigh compris entre 10^3 et 10^{10} . Pour un rapport d'aspect égal à 1, à savoir une cavité carrée/cubique, Labrosse et Tric [2] ont comparé des solutions 2D et 3D et ont montré que dans le plan de symétrie ces solutions sont proches dès que le nombre de Rayleigh est suffisamment grand pour que les conditions aux limites latérales du cas 3D n'influent pas l'écoulement dans ce plan. De plus, une transition à l'instationnarité a été observée pour des nombres de Rayleigh aux alentours de $\mathcal{R}_a = 3,2 \times 10^7$. Nous poursuivons ici les études 3D pour des nombres de Rayleigh plus élevés, compris entre 4×10^7 et 3×10^8 . On s'intéresse plus particulièrement à la structure 3D de l'écoulement et aux premières bifurcations susceptibles d'induire la transition vers le chaos. L'existence d'une gamme de nombres de Rayleigh [7×10^7 ; 10^8] où l'écoulement redevient stationnaire après la première bifurcation à $\mathcal{R}_a \simeq 3,2 \times 10^7$ constitue le résultat le plus remarquable de cette étude.

2. Problème physique et méthodes numériques

Nous nous plaçons dans le cas d'une cavité cubique remplie d'air où deux surfaces verticales opposées sont respectivement chauffée et refroidie, les autres faces étant adiabatiques (Fig. 1). L'écoulement est décrit par les équations de Navier–Stokes sous l'hypothèse de Boussinesq. Le nombre de Prandtl étant fixé ($\mathcal{P}_r = 0,71$ pour l'air) ainsi que le rapport d'aspect de la cavité, le problème ne dépend que d'un paramètre adimensionnel, le nombre de Rayleigh $\mathcal{R}_a = g\beta\Delta TH^3/(\nu\kappa)$ où H est la hauteur de la cavité. Les équations adimensionnées sont discrétisées en temps avec des schémas Euler retardés d'ordre 2 pour la dérivée en temps et Adams–Bashforth pour l'extrapolation des termes de convection comme décrit dans [3]. Deux codes numériques sont utilisées conjointement. Pour l'un, une méthode de différences finies centrées d'ordre 2 est utilisée pour la discrétisation spatiale, pour l'autre une méthode spectrale Tchebychev est employée. Le maillage en différences finies est du type décalé et non uniforme afin de bien capter les phénomènes proches des parois. Le couplage vitesse–pression est traité par une méthode de projection en différences finies et par une technique de matrice d'influence en spectral. Les systèmes linéaires ainsi obtenus sont résolus par une méthode itérative en différences finies et par la diagonalisation totale en spectral [4]. Les résultats présentés sont essentiellement tirés des calculs en différences finies tandis que quelques calculs spectraux avec une grande résolution sont utilisés, quand cela est nécessaire, pour confirmer les solutions obtenues en différences finies.

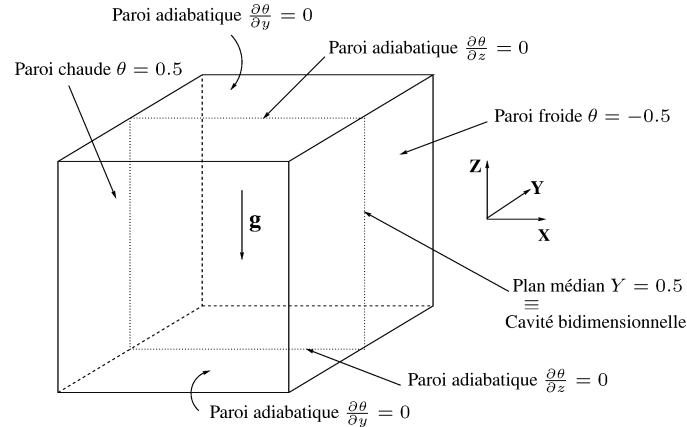


Fig. 1. Schéma de la cavité tridimensionnelle.

Fig. 1. Sketch of the three-dimensional cavity.

3. Résultats

3.1. Écoulement stationnaire : validation

Comme dans [2], nous obtenons des solutions stationnaires pour des nombre de Rayleigh $\mathcal{R}_a < 3 \times 10^7$. Pour $\mathcal{R}_a = 10^6$ et 10^7 , les solutions dans le plan de symétrie $y = 0,5$ sont similaires aux solutions 2D : les maxima de vitesse diffèrent de 0,5%, ce qui confirme la bonne représentation de l'écoulement dans le plan médian par l'approximation bidimensionnelle. Dans le tableau 1 les maxima de vitesse 3D à $\mathcal{R}_a = 10^7$ sont comparés avec ceux obtenus dans [2] et un bon accord est observé.

En ce qui concerne le transfert de chaleur, le nombre de Nusselt sur la paroi chaude obtenu par les calculs tridimensionnels à $\mathcal{R}_a = 10^6$ est $\mathcal{N}_{u_{3D}} = 8,6469$ ce qui est en bon accord avec la valeur obtenue par Janssen et Henkes [5]. De même que Labrosse et Tric [2], nous notons que la valeur $\mathcal{N}_{u_{2D}}$ obtenue à partir des calculs bidimensionnels surestime le transfert thermique.

3.2. Structure générale de l'écoulement instationnaire

Lorsque nous augmentons le nombre de Rayleigh au delà de 10^7 , nous observons une transition à l'instationnarité aux alentours de $\mathcal{R}_a = 3,2 \times 10^7$, ce qui est encore une fois conforme aux résultats de Labrosse et Tric [2]. Avant de présenter la structure de ces solutions instationnaires, il convient de décrire les symétries qui peuvent être rencontrées. Le problème présente trois symétries naturelles que possèdent les solutions stationnaires à faibles \mathcal{R}_a :

- la centro-symétrie 2D : $(u, v, w, \theta)(x, y, z) = -(u, -v, w, \theta)(1 - x, y, 1 - z)$
- la symétrie de réflexion par rapport à $y = 0,5$: $(u, v, w, \theta)(x, y, z) = (u, -v, w, \theta)(x, 1 - y, z)$
- la centro-symétrie 3D : $(u, v, w, \theta)(x, y, z) = -(u, v, w, \theta)(1 - x, 1 - y, 1 - z)$

Notons que ces symétries ne sont pas indépendantes étant donné que la centro-symétrie 3D est la combinaison de la symétrie de réflexion et de la centro-symétrie 2D.

Afin de mesurer les brisures de symétrie correspondant à l'apparition de l'instationnarité, nous calculons les quantités suivantes : $E_{c-2d} = \iiint [\theta(x, y, z) + \theta(1 - x, y, 1 - z)]^2$, $E_{r-y} = \iiint [\theta(x, y, z) - \theta(x, 1 - y, z)]^2$ et $E_{c-3d} = \iiint [\theta(x, y, z) + \theta(1 - x, 1 - y, 1 - z)]^2$.

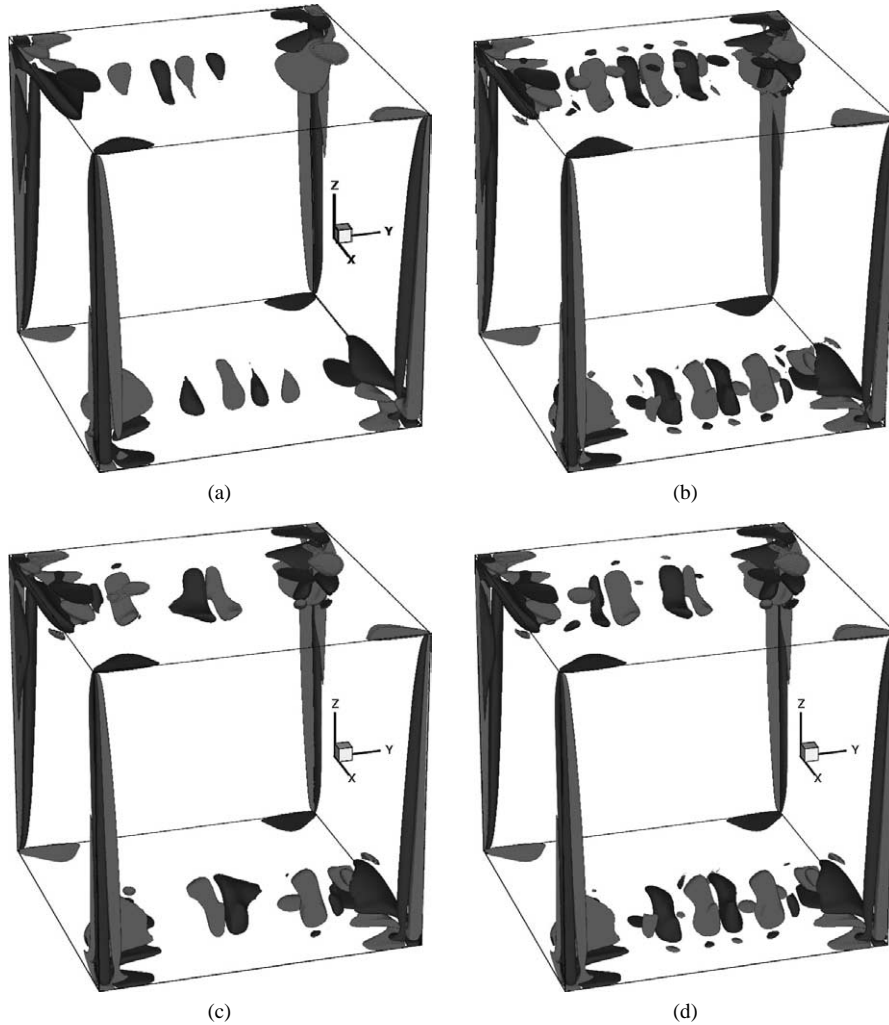


Fig. 2. Isovalues du tourbillon $\omega_x = \mp 0,5$: (a) $\mathcal{R}_a = 4 \times 10^7$; (b) $\mathcal{R}_a = 10^8$ (solution I); (c) $\mathcal{R}_a = 10^8$ (solution II); (d) $\mathcal{R}_a = 10^8$ (solution III).

Fig. 2. Isovalues of vorticity $\omega_x = \mp 0.5$: (a) $\mathcal{R}_a = 4 \times 10^7$; (b) $\mathcal{R}_a = 10^8$ (solution I); (c) $\mathcal{R}_a = 10^8$ (solution II); (d) $\mathcal{R}_a = 10^8$ (solution III).

Pour ces écoulements instationnaires, les trois indicateurs de symétries (E_{c-2d} , E_{r-y} et E_{c-3d}) prennent des valeurs non nulles. Ces brisures de symétries interviennent pour un nombre de Rayleigh compris dans l'intervalle $\mathcal{R}_a \in [3,2 \times 10^7; 3,5 \times 10^7]$ dans un ordre que nous n'avons pas cherché à définir pour des raisons de temps de calcul. En particulier, nous observons comme [2] la brisure de la symétrie de réflexion par rapport à $y = 0,5$.

L'écoulement instationnaire résulte des ressauts qui se créent à la sortie des couches limites verticales et aux alentours du plan $y = 0,5$. L'instationnarité se traduit par l'apparition de grosses structures tridimensionnelles à hauteur de ces ressauts (Fig. 2(a)), ayant la forme de tourbillons longitudinaux (selon X) contrarotatifs. L'écoulement instationnaire est caractérisé par des basses fréquences ($f_{\text{adim}} \approx 0,0052$), typiques du battement des tourbillons longitudinaux. Notons que les caractéristiques de cette transition à $\mathcal{R}_a \approx 3,2 \times 10^7$ sont similaires à celles de la première transition dans une cavité carrée bidimensionnelle [6], excepté pour la valeur du nombre de Rayleigh critique ($\mathcal{R}_{\text{ac}} = 1,8 \times 10^8$ en 2D).

Tableau 1

Comparaison des vitesses maximales dans la cavité, pour des solutions instationnaires (*i*) il s'agit des maxima du champ moyenné en temps

Table 1

Comparison of maximal velocities in full cavity, for unsteady solution (*i*) maxima of time averaged velocity field are shown

\mathcal{R}_a	$U_{\max} \times 10^{-1}$	$V_{\max} \times 10^{-2}$	$W_{\max} \times 10^{-1}$
10^6	1,2769	2,5705	2,3691
10^7			
Cet article	1,2251	2,6680	2,4300
[2]	1,213	2,64	2,428
4×10^7 (<i>i</i>)	1,1894	3,2224	2,4594
8×10^7	1,1712	3,2699	2,4714
10^8			
Solution I ($E_{c-3d} = E_{r-y} = E_{c-2d} = 0$)	1,1403	3,1988	2,4645
Solution II ($E_{c-3D} = 0$)	1,1511	3,2703	2,4880
Solution III ($E_{r-y} = 0$)	1,1494	3,2693	2,4861

Il est également intéressant de noter que la tridimensionnalisation de la structure des ressauts entraîne une augmentation brutale de la vitesse transversale : le maximum de la vitesse V passe de $2,6 \times 10^{-2}$ pour $\mathcal{R}_a \leq 10^7$ à $3,2 \times 10^{-2}$ pour $\mathcal{R}_a \geq 4 \times 10^7$ (Tableau 1). Les extréma de U et W ne sont guère influencés car les structures tridimensionnelles des ressauts se trouvent en dehors des couches limites.

3.3. Retour au stationnaire et nouvelle transition vers l'instationnarité

Si à partir des solutions instationnaires précédentes nous continuons à augmenter le paramètre de contrôle, nous observons pour $\mathcal{R}_a = 6,5 \times 10^7$ et 7×10^7 , une transition conduisant à un régime stationnaire qui n'a pas été décrit jusqu'à présent dans la littérature. En outre des solutions stationnaires multiples ont été observées pour $\mathcal{R}_a = 10^8$. Pour contrôler la réalité physique de ces solutions, de nombreux calculs ont été réalisés (différentes conditions initiales, pas de temps, finesse du maillage, calculs spectraux,...) et ont bien confirmé l'existence de ce régime stationnaire et des solutions multiples.

Ainsi pour $\mathcal{R}_a = 10^8$, et suivant les conditions initiales utilisées, nous avons obtenu trois solutions stationnaires différentes par leur propriété de symétrie. Pour l'une de ces solutions, les trois indicateurs de brisure de symétries précédemment définis tendent tous vers zéro ce qui indique que l'écoulement stationnaire possède comme les solutions stationnaires à faibles \mathcal{R}_a , les trois symétries naturelles du problème (Fig. 2(b)). En revanche les deux autres solutions ne conservent qu'une seule des trois symétries, à savoir soit la centro-symétrie 3D (Fig. 2(c); $E_{c-3d} = 0$ et $E_{r-y} = E_{c-2d} \neq 0$), soit la symétrie de réflexion (Fig. 2(d)); $E_{r-y} = 0$ et $E_{c-3d} = E_{c-2d} \neq 0$). Par rapport aux écoulements instationnaires précédents, la structuration de l'écoulement stationnaire semble identique : elle est caractérisée par des tourbillons longitudinaux qui ne présentent plus d'oscillations spatio-temporelles.

Notons que ces solutions multiples ont peu d'effet sur les quantités globales car les maxima des vitesses et les transferts de chaleur sont quasi-identiques (Tableau 1). Ce résultat s'explique par le fait que les différences entre ces solutions se trouvent essentiellement dans la zone des ressauts et à la sortie des couches limites verticales.

Notre intérêt s'est ensuite porté sur la stabilité de ces solutions stationnaires lorsque l'on augmente le nombre de Rayleigh. Etant donné le coût considérable des calculs en 3D, nous avons effectué seulement une simulation à $\mathcal{R}_a = 3 \times 10^8$ où l'écoulement obtenu est à nouveau instationnaire. Contrairement à l'instationnarité précédente caractérisée par de basses fréquences, l'écoulement instationnaire à $\mathcal{R}_a = 3 \times 10^8$ présente une haute fréquence (sa période est de quelques unités de temps sans dimension, $f_{\text{adim}} = 0,3326$), caractéristique de l'instabilité des couches limites verticales.

4. Récapitulation et discussion

Nous avons effectué des simulations numériques dans une cavité cubique différentiellement chauffée pour une gamme de \mathcal{R}_a comprise entre 10^5 et 3×10^8 . On peut ainsi distinguer les régimes d'écoulement suivants :

- Pour de faibles nombres de \mathcal{R}_a l'écoulement est stationnaire et possède les trois symétries suivantes : la centro-symétrie 2D dans le plan $x - z$, la centro-symétrie 3D et la réflexion par rapport à $y = 0,5$.
- En accord avec Labrosse [2], une première bifurcation de nature oscillatoire a lieu autour de $\mathcal{R}_a = 3,2 \times 10^7$, qui semble induite par la tridimensionnalisation des ressauts, créant des tourbillons longitudinaux.
- Un retour à des écoulements stationnaires est observé entre $\mathcal{R}_a = 6,5$ et 7×10^7 . Les structures 3D des ressauts, responsables de l'instationnarité à des \mathcal{R}_a plus faibles, redeviennent stationnaires et conduisent à des solutions multiples pour $\mathcal{R}_a = 10^8$. Les propriétés de symétries des trois solutions obtenues sont différentes.
- À des \mathcal{R}_a plus élevés ces écoulements deviennent à nouveau instationnaires. Une simulation effectuée à $\mathcal{R}_a = 3 \times 10^8$ le confirme bien et l'instabilité en question est du type couches limites verticales.

Du fait que les simulations réalisées sont extrêmement coûteuses, nous n'avons pas essayé de déterminer de façon précise la valeur critique de la première transition et ni étudié le lien entre ces solutions instationnaires et celles stationnaires obtenues pour $\mathcal{R}_a \geq 7 \times 10^7$. Ceci constituera l'étude à venir. Il sera également intéressant de calculer la valeur critique de la transition vers l'instationnarité ayant lieu entre $\mathcal{R}_a = 10^8$ et 3×10^8 .

Remerciement

Les simulations ont été réalisées à l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique) sous les projets de recherche n° 21282 et n° 20326.

Références

- [1] G. de Vahl Davis, I.P. Jones, Natural convection in a square cavity: a comparison exercise, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 3 (1983) 227–248.
- [2] G. Labrosse, E. Tric, A direct (pseudo-spectral) solver of the 2D/3D stokes problem: transition to unsteadiness of natural convection flow in a differentially heated cubical cavity, *Numer. Heat Transfert B* 31 (1997) 261–276.
- [3] P. Le Quéré, Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number, *Comput. & Fluids* 20 (1) (1991) 29–41.
- [4] D. Haidvogel, T. Zang, The accurate solution of Poisson's equations by expansion in Tchebyshev polynomials, *J. Comput. Phys.* 30 (1979) 167–180.
- [5] R.J.A. Janssen, R.A.W.M. Henkes, Instabilities in three-dimensional differentially heated cavities with adiabatic horizontal walls, *Phys. Fluids* 8 (1996) 62–66.
- [6] P. Le Quéré, M. Behnia, From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity, *J. Fluid Mech.* 359 (1998) 81–107.